

რიცხვითი სისტემები

მოამზადა ეკა კორძაძემ

პოზიციური და არაპოზიციური სისტემები.

ისევე, როგორც ყოველი ენა შედგება ანბანისაგან, რიცხვით სისტემებსაც თავისი ანბანი გააჩნიათ. ჩვეულებრივ, რიცხვების ჩასაწერად, ათ ციფრს ვიყენებთ: 0, 1, 2, ... ,9. ამიტომ ვამბობთ, რომ რიცხვები ჩაწერილია ათობით სისტემაში. ათობითი სისტემის უმთავრესი თავისებურება იმაში მდგომარეობს, რომ ციფრის ადგილმდებარეობას, ანუ პოზიციას, მნიშვნელობა აქვს და გარკვეული დატვირთვა გააჩნია. კერძოდ, მარჯვნიდან პირველი ციფრი მიუთითებს, ამ რიცხვში, ერთეულების რაოდენობას, მეორე ციფრი გვიჩვენებს ათეულების რაოდენობას, მესამე ასეულების და ა.შ. მაგალითად რიცხვი 729301 შედგება 1 ერთეულისაგან, 0 ათეულისაგან, 3 ასეულისაგან 9 ათასეულისაგან 2 ათიათასეულისაგან და 7 ასიათასეულისაგან.

რიცხვების ჩაწერის აღწერილ სისტემას **პოზიციური სისტემა ეწოდება**. რიცხვების, ჩვენთვის ბუნებრივი, ჩაწერის წესი ათობით პოზიციურ სისტემას წარმოადგენს. ამ შემთხვევაში ვამბობთ აგრეთვე, რომ რიცხვები ჩაწერილია პოზიციურ სისტემაში ათის ფუძით. ანუ რიცხვების ჩანაწერში გამოყენებული ძირითადი სიმბოლოების (ჩვენს შემთხვევაში ეს სიმბოლოები ათ ციფრს წარმოადგენენ) რაოდენობას ფუძეს უწოდებენ. ცხადია არსებობენ სხვა ფუძით აგებული პოზიციური სისტემებიც.

ზოგიერთ შემთხვევაში იყენებენ რიცხვების ჩაწერის არაპოზიციურ სისტემებსაც. ასეთი სისტემის ყველაზე გავრცელებული მაგალითია რიცხვთა ჩაწერის რომაული სისტემა. ამ სისტემაში ანბანის როლს ასეთი სიმბოლოები თამაშობენ: I, V, X, L, C და ა.შ. აქ ერთს I სიმბოლო აღნიშნავს, ხუთს - V, ათს - X, ორმოცდაათს - L, ასს - C და ა.შ. ამ სისტემაში რიცხვი 79 ასე ჩაიწერება LXXVIII. ვხედავთ, რომ სიმბოლოებს მნიშვნელობა ენიჭება მათი ურთიერთმდებარეობით სხვა გამოყენებულ სიმბოლოებთან მიმართებაში და არა მათი რიგითი დალაგების მიხედვით. ამიტომ ასეთი მეთოდი არ იძლევა პოზიციურ სისტემას. ძირითადად რომაული სისტემას გადანომრისათვის იყენებენ. ის ხშირად, აგრეთვე, დატანილი საათის ციფერბლატზე და სხვ.

თანამედროვე პერიოდში ათობითი სისტემა ყველაზე გავრცელებული სისტემაა. თუმცა როგორც აღრე, ახლაც იყენებენ სხვა სისტემებსაც. მაგალითად, საქართველოში ძალზე გავრცელებული იყო წონის ერთეული - „ფუთი“. ერთი ფუთი 16 კგ-ს უტოლდება. ამ ერთეულებში მიმდინარეობდა მარცვლეულით (სიმინდის, ლობიოს, ხორბლის და სხვ.) ვაჭრობა. ძველ ბაბილონში იყენებდნენ სამოცობით სისტემას. ზოგიერთი მკვლევარი სწორედ ამ სისტემას უკავშირებს წლის ხანგრძლივობას დღეებში (აღრე ითვლებოდა, რომ წელიწადი 360 დღე გრძელდებოდა). შეიძლება ამ სისტემას უკავშირდებოდეს დროის აღრიცხვაც: 60 წამი ერთი წუთია, 60 წუთი კი 1 საათი. გავრცელებულია თვლის ერთეული „დუჟინი“, რომელიც 12-ს შეესაბამება. დიდ ბრიტანეთში თორმეტობით სისტემაში თვლიან ფულის ერთეულებს (1 შილინგი = 12 პენსი), სიგრძის ერთეულებს (1 ფუტი = 12 დუიმს). კელტები იყენებდნენ ოცობით სისტემას. დღემდე ამ აღრიცხვის ნაშთები შემორჩენილია სხვადასხვა ადგილას. მაგალითად საფრანგეთში ფულის ერთეული - ფრანკი იყოფა 20 სუდ. მანძილის ერთეულად, ინგლისურენოვან ქვეყნებში, იყენებენ მილს (1 მილი=1,609344 მეტრი), ბენზინი გალონებში იზომება (აშშ-ში 1 გალონი = 3785411784 ლიტრი=231 კუბური ინჩი) და ა.შ.

მკვლევრები ათობითი სისტემის წარმოშობას და პოპულარობას თითებზე გადათვლას უკავშირებენ. ფიქრობენ, რომ ადრეულ პერიოდში, როდესაც ადამიანს თვლის აუცილებლობა წარმოეშობოდა, ის თითებთან შესაბამისობას ამყარებდა. ათამდე დათვლა მოსახერხებელია თითებზე და ხშირად ვიყენებთ. ათი თითი ერთ ათეულს შეადგენს, ათი ათეული ერთ ასეულს შეადგენს და ასე თანდათანობით დამკვიდრდა ათობითი სისტემა. აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ არსებობს შეხედულება, თითქოს ეს სისტემა სხვაზე უფრო მოსახერხებელია, რადგან რიცხვი 10 არის „მრგვალი“ რიცხვი და მასთან ურთიერთობა არის ადვილი. **ეს შეხედულება მცდარია.** რიცხვი 10 სწორედ იმიტომ „მრგვალი“ რიცხვი, რომ ის ათეულობით სისტემაშია აღებული. ასევე „მრგვალია“ რიცხვი 8 რვაობით სისტემაში, 20 ოცობით სისტემაში და ა.შ. პირიქით რიცხვი 10 არ არის „მრგვალი“ რიცხვი ხუთობით ან სხვა რომელიმე, ათობითისაგან განსხვავებულ, სისტემაში.

თვლის ათობითი და სხვა ფუძიანი სისტემები.

თქვენთვის ცნობილია, რომ ნებისმიერი რიცხვი ათობით სისტემაში ჩაიწერება 10-ის ხარისხების საშუალებით. მაგალითად, $3205 = 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$. საზოგადოდ თუ n რაიმე მთელი დადებითი რიცხვია, ის შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$n = a_0 10^m + a_1 10^{m-1} + \dots + a_{m-1} 10^1 + a_m 10^0.$$

ამ გამოსახულებაში m თანრიგი შედის. მას ასევე ჩაწერენ: $n = \overline{a_0 a_1 \dots a_m}$. როდესაც საჭიროა ხაზი გაუსვან იმას, რომ რიცხვი ჩაწერილია ათობით სისტემაში, იყენებენ ასეთ ჩაწერას: $(a_0 a_1 \dots a_m)_{10}$. ამ წარმოდგენებში $a_0, a_1, \dots, a_m$ იღებს მნიშვნელობებს 0, 1, 2, ..., 9.

თუ რიცხვის ფუძედ ავიღებთ სხვა რიცხვს p -ს, მაშინ ეს რიცხვი ასე ჩაიწერება

$$n = a_0 p^m + a_1 p^{m-1} + \dots + a_{m-1} p^1 + a_m p^0,$$

სადაც $a_0, a_1, \dots, a_m$ იღებს მნიშვნელობებს 0, 1, ..., $p - 1$. ამ რიცხვს ასე ჩავენოთ $(a_0 a_1 \dots a_m)_p$.

მაგალითად, $(2057)_8$ არის $2 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = 2 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8 + 7$ რიცხვის შემოკლებული ჩანაწერი. იგივე რიცხვი ათობით სისტემაში მიიღებს სახეს:

$$(2057)_8 = 2 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8 + 7 = 1071 = (1071)_{10}.$$

ამ მაგალითიდან კარგად ჩანს როგორ გადავიყვანოთ რიცხვი რომელიმე ფუძიანი პოზიციური სისტემიდან სხვა ფუძიან პოზიციურ სისტემაში. ამისათვის საჭიროა მოცემული ფუძით ჩანაწერში შევასრულოთ მოქმედებები იმ სისტემაში, რომელშიც გადაგვყავს. შევხვით ამ საკითხს უფრო დაწვრილებით.

რვის ფუძით შეკრებისას ვითვალისწინებთ იმას, რომ რიცხვ 8-ს შეესაბამება $(10)_8$, 16-ს შეესაბამება $(20)_8$ და ა.შ. ამიტომ მაგალითად, $(746)_8 + (3613)_8$ შეკრების შესრულებისას ვიქცევით ზუსტად ისე, როგორც მიჩვეული ვართ ათობით სისტემაში. ჩვენს შემთხვევაში გვექნება: 3-ს მიმატებული 6 არის 11 (ვიმყოფებით რვაობით სისტემაში!). შესაბამისად, 1-ს ვწერთ და ერთს ვიმასხოვრებთ. შემდეგ თანრიგში 4-ს მიმატებული 1 არის 5 და ერთიც დამასხოვრებული, იქნება 6. დაწერთ ექვსს და დასამასხოვრებელი არაფერი გვაქვს. შემდეგ თანრიგში 7-ს დამატებული 6 არის 15 (რვაობით სისტემაში). ამიტომ ვწერთ 5-ს და ვიმასხოვრებთ 1-ს. ბოლოს 3-ს მიმატებული დამასხოვრებული 1, იქნება 4. ასე, რომ

$$(746)_8 + (3613)_8 = (4561)_8.$$

ანალოგიურად შევამოწმებთ, რომ

$$(45763)_8 + (50507)_8 = (116472)_8, \quad (376752)_8 + (305426)_8 = (704400)_8.$$

გამოკლების ოპერაცია, როგორც შეკრების შებრუნებული, ისევე ტარდება, როგორც ათობით სისტემებში. მაგალითად, შევასრულოთ მოქმედება $(36745)_8 - (5677)_8$. 5-ს 7 არ აკლდება. ამიტომ „ვისესხებთ“ შემდეგი თანრიგიდან 1-ს და 15-ს გამოვაკლებთ 7-ს. მივიღებთ 6-ს (არ დაგვავიწყდეს, რომ მოქმედებებს რვაობით სისტემაში ვაწარმოებთ. აქ კი 15-ს გამოკლებული 7 არის 6, რადგანაც 6-სს დამატებული 7 არის 15). შემდეგ თანრიგში, 1-იანის სესხების შემდეგ დავტრა 3. 3-ს 7 არ აკლდება, ამიტომ შემდეგი თანრიგიდან „ვისესხებთ“ 1-ს და 13-ს გამოვაკლებთ 7-ს. მივიღებთ 4-ს (იმიტომ, რომ 7-ს დამატებული 4 არის 13 რვაობით სისტემაში). შემდეგ თანრიგში ვიღებთ 0-ს. შემდეგ 1-ს, ხოლო 3-იანი ჩამოგვაქვს უცვლელად. ასე, რომ

$$(36745)_8 - (5677)_8 = (31046)_8.$$

ასევე ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$(55421)_8 - (32776)_8 = (22423)_8, \quad (70432)_8 - (65743)_8 = (2467)_8.$$

შეკრების ოპერაციის საშუალებით შეგვიძლია გამრავლების ოპერაცია განვსაზღვროთ. ყოველ ფუძეს თავისი „გამრავლების ტაბულა“ შეესაბამება. მოვიყვანოთ რვის ფუძის გამრავლების ტაბულა:

1	2	3	4	5	6	7
2	4	6	10	12	14	16
3	6	11	14	17	24	25
4	10	14	20	24	30	34
5	12	17	24	31	36	43
6	14	24	30	36	44	52
7	16	25	34	43	52	61

ამ ტაბულის სისწორე ადვილად მოწმდება შეკრების ოპერაციის საშუალებით. მაგალითად, $(5)_8 \cdot (4)_8 = (5)_8 + (5)_8 + (5)_8 + (5)_8 = (24)_8$.

იმისათვის, რომ 8-ის ფუძიან რიცხვით სისტემაში გამრავლება მოვახერხოთ, საჭიროა ვიმოქმედოთ ისე, როგორც ჩვენთვისაა ცნობილი ათის ფუძიან სისტემაში. ასე მაგალითად, გადავამრავლოთ ერთმანეთზე $(537)_8$ და $(56)_8$. ამ გამრავლების პროცესი და შედეგი ასეთია:

$$\begin{array}{r} 537 \\ \times 56 \\ \hline 4112 \\ + 3333 \\ \hline 37442 \end{array}$$

ნახ. 1

ასევე ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$\begin{array}{r} 5016 \\ \times 327 \\ \hline 43142 \\ + 12034 \\ + 17054 \\ \hline 2071102 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2351 \\ \times 765 \\ \hline 14215 \\ + 16766 \\ + 21037 \\ \hline 2305775 \end{array}$$

ნახ.2

გაყოფა გამრავლების შებრუნებული ოპერაციაა და აქაც ჩვეული ხერხით ვატარებთ მოქმედებას. მაგალითად,

$$\begin{array}{r|l} 21714 & 72 \\ -164 & 236 \\ \hline 331 & \\ -256 & \\ \hline 534 & \\ -534 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

ნახ. 3

ამჟამად აქტუალურია სამობითი და ორობითი სისტემები. სამობით სისტემაში სამი ციფრი გამოიყენება: 0, 1 და 2. ორობით სისტემაში კი მხოლოდ ორი ციფრი გამოიყენება 0 და 1. სამობით სისტემაში $0+0=0$, $0+1=1$, $0+2=2$, $1+0=1$, $1+1=2$, $1+2=10$, $2+0=2$, $2+1=10$, $2+2=11$. ორობით სისტემაში $0+0=0$, $0+1=1+0=1$, $1+1=10$. შესაბამისად გამრავლებისას შეკრების მოყვანილი ცხრილი გვაძლევს შედეგს. მაგალითად, $(2)_3 \cdot (2)_3 = (11)_3$.

მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი ამ სისტემებისათვის.

$$\begin{array}{r} + (2122)_3 \\ + (211)_3 \\ \hline (10110)_3 \end{array} \quad \begin{array}{r} + (11001)_2 \\ + (1110)_2 \\ \hline (100111)_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - (1221)_3 \\ - (122)_3 \\ \hline (12)_3 \end{array} \quad \begin{array}{r} - (110110)_2 \\ - (1001)_2 \\ \hline (101101)_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times (2212)_3 \\ \times (122)_3 \\ \hline (12201)_3 \\ + (12201)_3 \\ + (2212)_3 \\ \hline (1210111)_3 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times (1101)_2 \\ \times (101)_2 \\ \hline (1101)_2 \\ + (1101)_2 \\ \hline (1000001)_2 \end{array}$$

ნახ. 4

რიცხვების გადაყვანა სხვა სისტემებში.

თუ რიცხვი ჩაწერილია რომელიმე სისტემაში, მაშინ მისი გადაყვანა ათობით სისტემაში შესაძლებელია უბრალო გამოანგარიშების საფუძველზე. მაგალითად,

$$(326)_7 = 3 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^1 + 6 = 3 \cdot 49 + 14 = (161)_{10},$$

$$(11010011)_2 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^1 + 1 = 128 + 64 + 16 + 2 + 1 = (211)_{10},$$

$$(221)_3 = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 = 18 + 6 + 1 = (25)_{10}.$$

პირიქით, თუ გვინდა ათობით სისტემაში მოცემული რიცხვი გადავიყვანოთ სხვა სისტემაში, მაშინ ის ამ სისტემის ფუძეების ხარისხებად უნდა წარმოვადგინოთ. მაგალითად, რიცხვი 572 წარმოვადგინოთ ხუთობით, სამობით და ორობით სისტემებში:

$$(572)_{10} = 4 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = (4242)_5,$$

$$(572)_{10} = 1 \cdot 3^6 + 1 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = (1010012)_3,$$

$$(572)_{10} = 1 \cdot 2^9 + 0 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (1000111000)_2.$$

მოყვანილი წარმოდგენები „ზეპირი ანგარიშის“ სირთულეებს შეიცავს. არსებობს ბევრად უფრო მარტივი ხერხი ათობით სისტემაში ჩაწერილი რიცხვის სხვა სისტემაში გადაყვანისათვის. ეს არის გაყოფისას მიღებული ნაშთების ამოწერის ხერხი. ავხსნათ ამ ხერხის გამოყენება მაგალითებზე. ვთქვათ გვინდა ათობით სისტემაში მოცემული რიცხვის, 4875-ის, გადაყვანა ოთხობით სისტემაში. შევასრულოთ მოცემული რიცხვის დაშლა 4-ზე გაყოფისას. ნაშთები ცალკე სვეტში ამოვწეროთ:

მოცემული რიცხვი	ახალი ფუძე	ნაშთი
4875	4	3
1218	4	2
304	4	0
76	4	0
19	4	3
4	4	0
1	4	1
0		

მიღებულ ნაშთებს ამოვწერთ ქვემოდან ზევით: $(4875)_{10} = (1030023)_4$.

მოვიყვანოთ კიდევ რამდენიმე მაგალითი. კერძოდ რიცხვი 9500438 გადავიყვანოთ ექვსობით, სამობით და ორობით სისტემებში.

მოცემული რიცხვი	ახალი ფუძე	ნაშთი
9500438	6	2
1583406	6	0
263901	6	3
43983	6	3
7330	6	4
1221	6	3
203	6	5
33	6	3
5	6	5
0		

ასე, რომ $(9500438)_{10} = (535343302)_6$.

მოცემული რიცხვი	ახალი ფუძე	ნაშთი
9500438	3	2
3166812	3	0
1055604	3	0
351866	3	2
117288	3	0
39096	3	0
13032	3	0
4344	3	0
1446	3	0
462	3	0
154	3	1
51	3	0
17	3	2
5	3	2
1	3	1
0		

ამიტომ $(9500438)_{10} = (122010000002002)_3$.

მოცემული რიცხვი	ახალი ფუძე	ნაშთი
9500438	2	0
4750219	2	1
2375109	2	1
1187554	2	0
593777	2	1
296888	2	0
148444	2	0
74222	2	0
37111	2	1
18555	2	1
9277	2	1
4638	2	0
2319	2	1
1159	2	1
579	2	1
289	2	1
144	2	0
72	2	0
36	2	0

18	2	0
9	2	1
4	2	0
2	2	0
1	2	1
0		

შესაბამისად, $(9500438)_{10} = (100100001111011100010110)_2$.